**Tema 3.3.1. Distribución Geométrica.**

**Motivación del tema.** Un explorador de petróleo perforará una serie de pozos para ver si encuentra petróleo. La probabilidad de que tenga éxito es de 0.2. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre petróleo por primera vez en el 5° intento?



Para resolver el problema debemos entender que en los primeros 4 intentos el explorador no encontró petróleo, sino hasta el quinto intento. Por lo tanto, buscamos la probabilidad de la quinteta

Este procedimiento se puede extender para cuando se encuentra petróleo, por primera vez, en el intento La fórmula es

y su gráfica es:

**Definición 1. Experimento Geométrico.** Un experimento geométrico se caracteriza por tener las siguientes propiedades

* En cada ensayo solo se tienen 2 resultados: *éxito y fracaso,* con probabilidades y respectivamente y .
* Los ensayos son independientes.
* Se repiten los ensayos hasta obtener *éxito* por primera vez.

**Definición 2.** Una variable aleatoria tiene **Distribución Geométrica con Parámetro , escrito ,** si su función de densidad está dada por

, ( 1 )

O escrita como una tabla

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |  |
|  |  |  |  |  |  |

donde

probabilidad de obtener *éxito* en el ensayo y en los anteriores *fracaso.*

probabilidad de *éxito*

probabilidad de *fracaso.*

**Teorema 1. Propiedades de la distribución geométrica.** Como toda función de densidad la distribución geométrica tiene las siguientes propiedades:

1. , donde debe estar en la tabla de la función de densidad
2. .

**Ejemplo 1. a)** Dibuje la gráfica de la distribución geométrica con , b) calcule , y .

**Solución.** a)Sabemos que y con ( 1 ) hacemos la siguiente tabla

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

b) Para resolver este ejercicio utilizamos la propiedad 2 del teorema 1. La tabla de la función de densidad para este ejemplo es la tabla que obtuvimos en a) entonces tomando de la tabla solamente los valores que están entre -3 y 5( sin contar el valor en 5) y los sumamos obtenemos la respuesta

Observe que la tabla no está definida en -3, -2, -1 y 0, por eso la suma sólo contiene el valor en 1, 2, 3 y 4. Para calcular deberíamos calcular la suma infinita

Podemos calcular esta suma de una manera más fácil vamos utilizando la propiedad 3 del teorema 1, pues

donde la veracidad de la igualdad la comprobamos pasando los términos negativos al otro miembro y ver que la suma es 1.

**Ejemplo 2.** Calcular la probabilidad de que en lanzamientos sucesivos de un dado no cargado, se obtenga un 3 por primera vez en el 5° lanzamiento.

**Solución.** Aplicamos la distribución geométrica (1) con , y , para obtener

**Ejemplo 3.** En una clínica están formadas 5 personas y se les está checando si tienen diabetes. La probabilidad de que una persona tenga diabetes es de , calcular la probabilidad de que la 5° persona sea la primera en diagnosticarle diabetes.

**Solución.** Utilizando la distribución geométrica con , y obtenemos

**Teorema 1. Propiedades de la Distribución Geométrica.**

|  |  |
| --- | --- |
| Esperanza |  |
| Varianza |  |
| Función Generadora de Momentos |  |

**Demostración.** Vamos a demostrar la fórmula de la función generadora de momentos, pero antes recordemos la fórmula de la serie geométrica

Ahora si vamos con la fórmula de

donde hemos utilizado las leyes de los exponentes para escribir

en este último utilizamos la serie geométrica con .

Como sabemos la esperanza y varianza se pueden obtener con , se deja como ejercicio obtener esas 2 fórmulas.

**Ejemplo 4.** Para una variable aleatoria se tiene , calcular su esperanza, varianza y función generadora de momentos.

**Solución.** Utilizando la tabla del teorema 1 obtenemos

, y

**Ejercicios.**

1. Utilizar la función generadora de momentos para obtener la media y varianza de una distribución geométrica.
2. Se supone que el 30% de los aspirantes para cierto trabajo industrial tiene un entrenamiento avanzado. Los aspirantes son entrevistados, uno tras otro, y son seleccionados al azar del conjunto de aspirantes. Determine la probabilidad de que el primer aspirante con entrenamiento sea el quinto entrevistado. ¿Cuál es el número esperado de aspirantes que hay que entrevistar para encontrar el primero con entrenamiento avanzado?

Respuesta: 0.072, 3.33

1. Sea una variable aleatoria geométrica con la probabilidad de éxito . (a) Demuestre que para un entero positivo , , (b) demuestre que para enteros positivos y

Ayuda: , simplifique esta expresión con la fórmula . Para b) utilice la fórmula con y

1. Al contestar a la pregunta “alguna vez ha fumado mariguana”, muchas veces la gente no quiere contestar afirmativamente. Si el 20% que debería contestar verídicamente que “si”, el 70% miente, (a) ¿cuál es la función de densidad de la variable aleatoria que cuenta el número de personas que se necesitaría entrevistar hasta obtener una respuesta afirmativa?, (b) ¿cuál es el valor esperado de entrevistas que debemos hacer?

Ayuda: (0.2)(0.7) es el porcentaje de los que dicen que “si” y mienten.

Respuesta: (a) , (b) 16.66

1. Con respecto a la motivación del tema que se presentó, (a) ¿ cuál es la probabilidad de que el explorador no encuentre petróleo si solamente puede perforar 10 pozos?, (b) ¿cuántos pozos se esperan perforar para encontrar petróleo por primera vez?

Respuesta: (a) , (b) 5.